Salzburg, 20.1.2011

Argumentieren und Begründen im Mathematikunterricht –
Wie können diese Kompetenzen von S/S entwickelt und von L/L beurteilt werden?

Eva Sattlberger

Institut für Bildungswissenschaft – Universität Wien

Zum Kompetenzbegriff

Ausgangspunkt: die Kompetenzen der Schüler/innen sollen messbar gemacht werden.

Kompetenzbegriff in Anlehnung an Weinert (2001):

längerfristig verfügbare, kognitive Fähigkeiten, die von den Lernenden entwickelt werden können und sie befähigen, bestimmte Tätigkeiten in variablen Situationen auszuüben sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten einzusetzen.

Ziel: Outputsteuerung und Outputkontrolle

Theoretischer Hintergrund (nach Halbheer/Reusser, 2008) - 1

Für die Festlegung und Überprüfung von Kompetenzniveaus bieten sich zwei Möglichkeiten an:

- **Bei einem deduktiven Vorgehen werden die Kompetenzniveaus theoriebezogen, d.h. aufgrund entwicklungspsychologischer, fach- und allgemeindidaktischer Erkenntnisse modelliert. Ein Beispiel dafür sind die NCTM-Standards. Neben Leistungsstandards werden in diesem Referenzdokument des amerikanischen MU auch „opportunity to learn standards“ bzw. Kriterien für die Gestaltung von Aufgaben und Lernumgebungen formuliert.**

Theoretischer Hintergrund (nach Halbheer/Reusser, 2008) - 2

Für die Festlegung und Überprüfung von Kompetenzniveaus bieten sich zwei Möglichkeiten an:

- **Im anderen Fall (z.B. bei PISA) werden die Kompetenzstufen anhand von Testergebnissen und über Rasch-Modelle erzeugt. Dabei wird davon ausgegangen, dass zwischen den geschätzten Fähigkeiten einer Person und der Lösungswahrscheinlichkeit von Aufgaben eine Beziehung besteht, welche eindimensional darstellbar ist.**

Zu beachten:

Messbar machen der Bereitschaft, Fähigkeiten und Fertigkeiten einzusetzen? Beurteilung?

Kompetenzerwerb der S/S setzt voraus, dass von L/L-Seite her bereits berufsbezogene Kompetenzen bestehen – bedingt eine Reflexion über L/L-Kompetenzen

Nähe des Kompetenzbegriffs zum Thema „Problemlösen“

Problemlösungskompetenz soll in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll genutzt werden können.

Zu bedenken:

Standards und Verbindlichkeit:

Standards sind ein bildungspolitisches Anliegen, d.h. L/L „werden nicht automatisch einen anderen – z.B. integrativeren, kognitiv aktivierenderen – Unterricht inszenieren“ (Weinert 2001), weil Kompetenzvermittlung vorgeschrieben ist.

Kompetenz vs Performanz:

Kompetenz unterscheidet sich (fast) immer von Performanz

Standards für die 8. Schulstufe:

(Mathematische) Kompetenz ist ein Tripel aus

1.) Handlungsbereiche

– H1: Darstellen, Modellbilden

– H2: Rechnen, Operieren

– H3: Interpretieren

– ***H4: Argumentieren, Begründen***

3.) Komplexitätsbereiche

– K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

– K2: Herstellen von Verbindungen

– ***K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflexion***

Standards für die 8. Schulstufe:

2.) Inhaltsbereiche

- I1: Zahlen und Maße
- I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
- I3: Geometrische Figuren und Körper
- I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen

Bildungstheoretische Orientierung

1.) „Lebensvorbereitung“

– selbstbestimmte und aktive Teilnahme an der Gesellschaft

vgl. mit „mathematical literacy“:

“Mathematical literacy is an individual’s capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual’s life as a constructive, concerned and reflective citizen.” (PISA 2003, S. 24)

universität wien

Bildungstheoretische Orientierung: „Lebensvorbereitung“

– Mathematik als Inventar unserer Lebenswelt

– Mathematik als wichtiges Mittel der Kommunikation:

Darstellen, Interpretieren, Begründen

– Mathematik als Erkenntnis- und Konstruktionsmittel:

Modellbilden

– Mathematik als Denktechnologie

Operieren

Insgesamt: Flexible Anwendung grundlegenden Wissens
statt spezifisches Wissen und Können

Dabei: potentielle statt strikte Authentizität

2.) Anschlussfähigkeit

– Grundlage für

- weiterführende mathematische Ausbildung
- Bewältigung von mathematischen Anforderungen, die über Alltagserfordernisse hinausgehen

– Kommunikationsfähigkeit mit Expert(inn)en (R. Fischer)

Insgesamt: Erweiterung, Explizierung (inner-) mathematischer Zusammenhänge und Strukturen

Betonung spezifischer mathematischer Tätigkeiten (z. B. Formalisieren, Definieren, Beweisen)

universität wien

Gesetzliche Grundlage: die Verordnung 1

seit 1.1.2009 in Kraft, Testung ab 2011/12 (Diagnose)

http://www.bifie.at/sites/default/files/ VO_BiSt_2009-01-01.pdf (13.2.2009)

Begriffsbestimmungen:

- „Bildungsstandards“: konkret formulierte Lernergebnisse
- „Kompetenzen“: **längerfristig** verfügbare kognitive Fähigkeit und Fertigkeit
- „grundlegende Kompetenzen“
- „Kompetenzmodelle“: [...]
- „Kompetenzbereiche“: fertigkeitsbezogene Teilbereiche eines KM

Gesetzliche Grundlage: die Verordnung 2

Funktionen der Bildungsstandards:

- Aufschluss über
  - Erfolg des Unterrichts und
  - Entwicklungspotential des österreichischen Schulwesens
- nachhaltige Ergebnisorientierung
- Diagnostik als Grundlage für individuelle Förderung
- Qualitätssicherung

Dafür: L müssen den systematischen Aufbau der K und BS bei Planung und Gestaltung ihrer Unterrichtsarbeit berücksichtigen: **normative** Funktion

Und was sagt der Lehrplan?

1. ***Bildungs- und Lehraufgabe:*** **„in Verfolgung entsprechender Lernziele [...], Argumentieren und exaktes Arbeiten, [...] als mathematische Grundtätigkeiten durchführen“ (Lehrplan 2000, S. 1)**
2. ***Unterrichtsziele und Unterrichtsinhalte*** **erläutert die mathematische Grundtätigkeit des Argumentierens und exakten Arbeitens als „präzises Beschreiben von Sachverhalten, Eigenschaften und Begriffen (Definieren); Arbeiten unter bewusster Verwendung von Regeln; Begründen (Beweisen); Arbeiten mit logischen Schlussweisen; Rechtfertigen von Entscheidungen (etwa der Wahl eines Lösungsweges oder einer Darstellungsform)“ (Lehrplan 2000, S. 1).**

Berücksichtigung im Standards-Modell 1

1. im **Handlungsbereich H4** „Argumentieren, Begründen“

„*Argumentieren* meint die Angabe von mathematischen Aspekten, die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise/Entscheidung sprechen. Argumentieren erfordert eine korrekte und adäquate Verwendung mathematischer Eigenschaften/Beziehungen, mathematischer Regeln sowie der mathematischen Fachsprache.

Begründen meint die Angabe einer Argumentation(skette), die zu bestimmten Schlussfolgerungen/ Entscheidungen führt“ (Heugl & Peschek 2007, S. 12).

Berücksichtigung im Standards-Modell 2

Charakteristische Tätigkeiten

- Argumente für/gegen Modell, Begriff, Darstellungsform, Lösung(sweg), Interpretation
- Entscheidung argumentativ belegen
- Vermutungen formulieren und begründen
- Zusammenhänge (Formeln, Sätze) herleiten bzw. beweisen
- zutreffende/unzutreffende Argumentationen bzw. Begründungen erkennen und begründen

(ebenda, S. 12)

Berücksichtigung im Standards-Modell 3

2. im Komplexitätssbereich K3 „Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren“

meint (u. a.) „das Nachdenken über (vorgegebene) Interpretationen, Argumentationen oder Begründungen“

bzw. soll Reflexion(swissen)

„durch Dokumentation von Lösungswegen, durch entsprechende Entscheidungen, oft aber auch durch entsprechende Argumentationen und Begründungen“

sichtbar werden (Heugl & Peschek 2007, S. 14).

Beispiel 1

Berechne die Summe der Zahlen 289 und 3508! Wie ändert sich die Summe, wenn der erste Summand um 35 vergrößert wird?

Berechne die Summe der Zahlen 4988 und 576! Wie ändert sich die Summe, wenn der zweite Summand um 78 vergrößert wird?

Fällt dir bei den letzten beiden Aufgaben etwas auf? Versuche es zu beschreiben!

Überprüfe an einem selbst gewählten Beispiel!

=> Vermutungen formulieren und mit einem Beispiel überprüfen

Abbildung im Standardsmodell 1

Aufgabe 3 (PHB, S. 59) – 4./5. Schulstufe:

Wie ändert sich der Flächeninhalt eines Rechtecks, wenn man

a) **die Länge a verdoppelt**
b) **die Breite b verdoppelt**
c) **die Länge a und die Breite b verdoppelt?**

Erkläre dein Ergebnis deinem Sitznachbarn/deiner Sitznachbarin!

Fertige dazu eine geeignete Zeichnung an!

universität wien

Abbildung im Standardsmodell 2

Aufgabe 5 (PHB, S. 60) – 5./6. Schulstufe:

Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Begründe deine Antwort.

Verdoppelt man jede Kantenlänge eines Würfels, so ist das Volumen des neuen Würfels

A doppelt so groß

B dreimal so groß

C viermal so groß

D achtmal so groß

E vierundzwanzig mal so groß.

Entscheidungen argumentativ belegen

Übung im Unterricht

Der Radius eines Kreises wird

1) **verdoppelt**
2) **verdreifacht**
3) **verfünffacht**

Wie ändert sich a) der Umfang, b) der Flächeninhalt dieses Kreises? „Das ist einfach“, meint Paula Kuddelmuddel. „Umfang und Flächeninhalt werden dann natürlich auch verdoppelt, verdreifacht oder verfünffacht.“

Erkläre, warum es doch nicht ganz so einfach ist und stelle richtig!

(Hanisch et al. 2009, S. 237)

Zwei Funktionen des Argumentierens für Kommunikation:

- **Zusammenhang stiftende** Funktion: **besseres Verständnis** eines Sachverhalts, **tiefere Einsicht** in ihn

- **Überzeugungs**funktion: es soll also jemand von der **Richtigkeit einer Behauptung** überzeugt werden

(Malle 2002, S. 4, vgl. Götz & Sattlberger 2007, S. 102)

zur Kommunikationsfähigkeit mit
der **Allgemeinheit** und mit **Expert(inn)en** (Fischer 2003, S. 561)

Abbildung im Standardsmodell 3
7./8. Schulstufe (PHB, S. 61f)

Wird bei einem Rechteck die Länge jeder Seite verdoppelt, so verdoppelt sich der Flächeninhalt. Widerlege diese Aussage.

Anführen eines Gegenbeispiels!

Wird bei einem Rechteck die Länge jeder Seite verdoppelt, so verdoppelt sich der Umfang. Beweise diese Aussage.

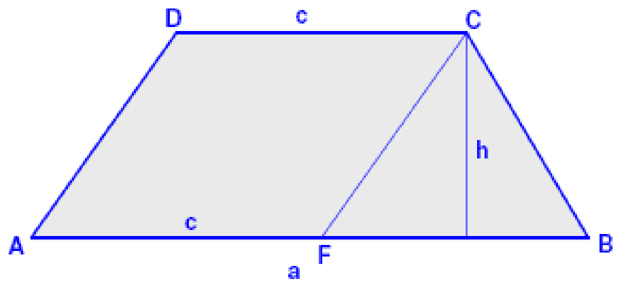
Rechnen mit Variablen soll dazu befähigen, Beweise allgemein zu führen.

Beispiel 2

Andere Antwortformate:

- Offene Antworten: **Flächeninhalt** (S. 91) **I3-H4-K2**

Claudia findet in einem Schulbuch folgende Grafik eines Trapezes ABCD:



Darunter wird eine Formel für den Flächeninhalt des Trapezes angegeben:

$$A = c \cdot h + \frac{(a-c) \cdot h}{2}$$

Aufgabe: Erkläre die angegebene Flächeninhaltsformel!

Kann geübt werden durch:

a)Berechne den Flächeninhalt des Rhombus mit der Diagonalen e = 47 mm, f = 35 mm!

b)Erkläre, warum die Flächeninhaltsformel $A = \frac{e.f}{2}$ für den Rhombus gilt!

c) Welche zweite Möglichkeit gibt es den Flächeninhalt eines Rhombus zu berechnen? Welche Bestimmungsstücke müssen dafür gegeben sein?

(Hanisch et al. 2009, S. 186)

Beispiel 3

- Kurze geschlossene Antworten:

Zehnerpotenzen (S. 23) **I1-H1-K3**

Betragsmäßig sehr große oder sehr kleine Werte werden häufig mittels Zehnerpotenzen dargestellt (z. B. 6000000000000 = 6×10^{12} oder 0,00000000006 = 6×10^{-11}).

Aufgabe: Welchen Vorteil bringt diese Schreibweise mit sich?

Lösung: ……………………..

Wahl der Argumentationsbasis 1

= Fundament, auf das sich man sich bei der Argumentation stützt

höhere Mathematik: **Definitionen und Sätze**

Niedrigere Ebene: **Handlungen, Bilder, Alltagserfahrungen**

z.B. **$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$** soll begründet werden

Masse von Butter

Tortenbild

Verfahren der Bruchrechnung $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2/4 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Bruchrechenregeln (Erweiterungsregel, Additionsregel)

Wahl der Argumentationsbasis 2

Schüler/innen ist oft nicht klar, worauf sie sich beziehen können
=> Welche Argumentationsbasis wird als richtig gewertet?

=> Was erwartet der/die Lehrer/in von mir?

Begriff der **Exaktheit** spielt eine Rolle

Steht immer in Zusammenhang mit einer bestimmten Argumentationsbasis

Eine Begründung ist umso exakter, je detaillierter die Begründungsschritte ausgeführt werden und je deutlicher dabei der Bezug zur Argumentationsbasis ersichtlich ist.

Beispiele 4

Größenvergleich (Heugl & Peschek 2007, S. 39) **I1-H4-K2**

Gegeben sind die beiden Zahlen $-\frac{5}{4}$ und $-\frac{3}{2}$.

Aufgabe: Begründe in Worten anhand einer Darstellung der beiden Zahlen auf der Zahlengeraden, warum $-\frac{5}{4}$ größer ist als $-\frac{3}{2}$!

Lösung:

Argumentationsbasis vorgegeben

(Exaktifizierungsniveau ebenso)

Es muss klar sein, welche Tätigkeit verlangt wird*.*

Dazu

Begründe, dass zwischen zwei rationalen Zahlen eine weitere rationale Zahl liegen muss.

(Malle 2004, S. 13)

Oder

Wie viele Bruchzahlen gibt es zwischen $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$?
Begründe deine Antwort.
(Malle 2004, S. 13)

Rechnerisch (wie Aufgabe davor)

Grafisch

Beispiel 5

5. Schulstufe:

Tom und Sara machen Mathe-Hausübung. Zuerst rechnet jeder selbst, dann vergleichen sie immer ihre Ergebnisse. So sind sie schon oft auf Fehler draufgekommen und konnten sie noch rechtzeitig ausbessern. Diesmal hatten sie unter Anderem folgendes Beispiel zu rechnen:

$$6782 + 455 - (2488 - 178) =$$

Toms Ergebnis ist 4 927 und bei Sara kommt 4 571 heraus. Kannst du überprüfen, wer richtig gerechnet hat? Begründe deine Antwort!

(vgl. Hanisch et al. 2007, S. 65)

6. Schulstufe:

Paul Kuddelmuddel rechnet so: $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

Erkläre, was er falsch gemacht hat und wie es richtig wäre! (vgl. Hanisch et al. 2008, S. 92, leicht verändert).

Kommentar: Derartige Aufgaben haben den Vorteil, dass nicht Fehler von Schüler(inne)n der zu unterrichtenden Klasse besprochen werden müssen, sondern eine fiktive Figur stellvertretend für typische Schüler(innen)fehler eingesetzt wird.

Argumente für/gegen Lösungsweg

Dazu

Begründe, warum $3 : \frac{1}{2} = 6$ **gilt!**

Begründe, warum $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$ **gilt!**

(Malle 2004, S. 13)

Reden über Mathematik

Üben

mündlich genauso wie schriftlich

Unterscheidung zwischen Lern- und Prüfungssituationen

Zulassen von Fehlern

Zulassen von unterschiedlichen Lösungswegen

Mathematik und Sprache

Die Sprache des Menschen hat eine zumindest doppelte Funktion: eine kommunikative und eine kognitive Funktion. Die kommunikative Funktion dient der Verständigung, die kognitive Funktion dient dem Erkenntnisgewinn (Klix 1995).

Mathematik und Sprache (vgl. Maier et al. 1999)

Beide Funktionen hängen, wie gerade an der Verwendung der Sprache in der Mathematik deutlich zu sehen ist, eng zusammen. Die Sätze

Bezeichnen wir in einem rechtwinkeligen Dreieck die Längen der Katheten mit a und mit b und die Länge der Hypotenuse mit c, so gilt $a^2 + b^2 = c^2$. Sind a, b und c teilerfremde natürliche Zahlen (wobei man annehmen kann, dass a eine gerade Zahl ist), so gibt es ganze Zahlen u und v, so dass die Formeln $a = 2uv$, $b = u^2 - v^2$, $c = u^2 + v^2$ gelten.

sind sprachliche Mitteilungen, die gesprochen oder geschrieben werden können, wobei der erste Teil durch eine Zeichnung unterstützt werden kann. Die kognitive Leistung der Sprache ist durch das Schaffen von Begriffen wie DREIECK, RECHTWINKELIG, KATHETE, GANZE ZAHL, TEILERFREMD, ... erkennbar.

Deutlich wird auch die Verdichtung der Information durch die mathematische Symbolsprache (der Verwendung von Variablen, Relationen und Operatoren), die im geschriebenen Text besonders hervortritt.

Mathematik und Sprache

Für den Gebrauch der Sprache durch Schüler/innen und Lehrer/innen im Rahmen der unterrichtlichen Kommunikation lassen sich drei Aufgaben unterscheiden:

- **das Verstehen von sprachlichen Äußerungen der Lehrperson und der Mitschüler/innen sowie von (schriftlichen) Texten (Sprachverstehen),**
- **das Hervorbringen eigener sprachlicher Äußerungen und Texte (Sprachproduktion)**
- **das ‘Übersetzen’ von gesprochener Sprache in geschriebene und umgekehrt**

Zum Definieren und Verwenden mathematischer Begriffe

Die mathematische Fachsprache ist vor allem dann bedeutsam, wenn es gilt, den Wahrheitswert mathematischer Aussagen zu entscheiden bzw. entscheidbar zu machen.

Es bedarf dazu zweierlei: einer genaueren Festlegung der Objekte, Handlungen und Beziehungen, von denen die Texte sprechen, und eines geordneten Verfahrens der Argumentation zugunsten eines bestimmten Wahrheitswerts für die einzelnen Aussagen im Text. Ersteres wird in einer speziellen Form des Definierens geleistet, letzteres mittels besonderer Regeln des Beweisens.

Vokabellernen

Number Sense & Operations – Grade 8

commission	percent
evaluate	percent decrease
expenses	percent increase
gratuity	percent of quantity
greatest common factor	profit
income	sale price
integral exponents	sales
interest rates	simple interest
laws of exponents	tax

Beispiel 6: Aufgaben zur Prozentrechnung

7. Schulstufe

Ein iPod kostet ohne Mehrwertsteuer 185€.

a) **Beim Kauf kommen 20% Mehrwertsteuer dazu. Um welchen Preis kann man den iPod im Geschäft kaufen?**

b) **Wie viel ist zu bezahlen, wenn der Preis (inkl. Mehrwertsteuer) um 20% gesenkt wird?**

c) **Erkläre, warum das Ergebnis aus b) nicht 185€ ist!**

(Hanisch et al. 2009, S. 238)

=> Argumente für/gegen einen Lösungsweg

Aufgaben zur Prozentrechnung - 2

8. Schulstufe

Paula Kuddelmuddel meint: „Wenn ein Elektrogerät 190€ kostet und ich den Preis unauffällig um 10% erhöhen möchte, dann erhöhe ich den Preis am besten zuerst um 5% und dann ein wenig später noch einmal um 5%, dann komme ich insgesamt auch auf 10% Erhöhung.“ Hat Paula damit Recht? Kommentiere Paulas Vorgehensweise und stelle sie in Worten oder mit einer Rechnung gegebenenfalls richtig!

=> Argumente/Begründungen erkennen und begründen

Aufgaben zur Prozentrechnung - 3

Eine „herkömmliche“ Aufgabe:

Der Anhalteweg eines Pkw setzt sich zusammen aus dem Bremsweg und der Strecke, die während der Reaktionszeit zurückgelegt wird. (Die Reaktionszeit ist ...). Der Anhalteweg in m kann grob mit dem Term $(0{,}1x)^2 + 0{,}3x$ bestimmt werden, wobei x die Geschwindigkeit in km/h ist, die das Fahrzeug beim Erkennen der Gefahr hatte. Bei welcher Geschwindigkeit ist der Anhalteweg bereits 50m (100m) lang?

Wir verändert:

Toms Vater sagt: „Wenn man 20 km/h schneller fährt als erlaubt, verlängert sich der Bremsweg höchstens um 10%.“ Was sagst du dazu?

Beispiel 7

• **Vorbereitung:** Wandertag (Heugl & Peschek 2007, S. 65) **I2-H4-K2**

Die Klasse will am Wandertag mit dem Bus zu einem Schloss fahren. Sandra und Lukas haben bei zwei Reisebüros nachgefragt und folgende Auskünfte erhalten:

Tarif 180/2: Für den Bus wird eine Tagesgebühr von € 180,- verlangt; zusätzlich kostet jeder gefahrene Kilometer noch € 2,-.

Tarif 120/3: Für den Bus wird eine Tagesgebühr von € 120,- verlangt; zusätzlich kostet jeder gefahrene Kilometer noch € 3,-.

Sandra hat auch schon ausgerechnet, dass beide Tarife gleich teuer wären, wenn man genau 60 Kilometer fährt.

Aufgabe: Bei welchen Fahrtstrecken ist welcher Tarif günstiger? Warum ist dies so?

Lösung:

wird z. B. durch

Die Kosten einer Taxifahrt (ohne Stehzeit, Geschwindigkeit >17 km/h) setzen sich zusammen aus der Grundgebühr und dem Betrag, den man für die gefahrene Wegstrecke (Kilometerpreis mal Anzahl der gefahrenen Kilometer) zu zahlen hat. [...]

3) Berechne die Taxikosten für die gegebene Strecke, wenn als Grundgebühr bei Tag 2,50 € (bei Nacht 2,60 €) und als Kilometerpreis bei Tag 1,20 € (bei Nacht 1,40 €) berechnet werden (Preise in Wien, Stand 2006)! a) 2 km [...]“

(Reichel & Humenberger 2008, S. 92)

vorbereitet. **SPIRALING**

Analyse der (Beispiel-)Aufgaben

- **24 von 48 entweder H4 oder K3 zugehörig**
- **verschiedene Antwortformate**
  - 12 Multiple Choice
  - verbale Formulierungen:
    - Zeige, Begründe mathematisch: Explizieren von Rechenregeln, Sätzen
    - Begründe: verbal, Argumentationsbasis vorgegeben
    - Beschreibe: Auflisten aufeinander folgender Tätigkeiten
    - Erkläre: Trapezaufgabe (s. o.)
  - Begründung von Verwendung von Darstellungsweisen, Umformungen, Entscheidungen

Beispiel 8 – Schulbuch (Hanisch et al. 2001, S. 76)

230 (1), (3), (6), (7) richtig

230 Paul und Paula Kuddelmuddel haben sich wieder einmal über Mathematik unterhalten, diesmal über die reellen Zahlen. Markiere, ob richtig oder falsch und stelle falsche Aussagen richtig!

(1) Jede natürliche Zahl ist eine reelle Zahl.
(2) Jede reelle Zahl kann als Bruch dargestellt werden.
(3) Die Menge der reellen Zahlen besteht aus den rationalen und aus den irrationalen Zahlen.
(4) Jede reelle Zahl ist eine negative ganze Zahl.
(5) Es gibt eine größte reelle Zahl.
(6) Es gibt keine kleinste reelle Zahl.
(7) Jede nicht periodische Dezimalzahl ist eine reelle Zahl.

Beispiel 8 – Angabe

Irrationale Zahlen (Heugl & Peschek 2007, S. 41) **I1-H4-K3**

Britta erzählt ihrer Freundin: „$\sqrt{2}$ ist keine rationale, sondern eine irrationale Zahl.“

Ihre Freundin möchte nun wissen, warum $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Aufgabe: Welche der folgenden Argumente Brittas sind zutreffend, welche nicht?

Beispiel 8 – Lösungsvorschläge

		trifft zu	trifft nicht zu
A	⌦2 ist keine rationale Zahl, weil die Wurzel einer Zahl nie rational ist.		
B	⌦2 ist keine rationale Zahl, weil man ⌦2 nicht als Bruch zweier natürlicher Zahlen darstellen kann.		
C	⌦2 ist keine rationale Zahl, weil man ⌦2 nicht am Zahlenstrahl darstellen kann.		
D	⌦2 ist keine rationale Zahl, weil ⌦2 in Dezimalschreibweise unendlich, aber nicht periodisch ist.		

Beispiel 9

7. Schulstufe

Wähle eine beliebige natürliche Zahl. Bilde die Summe dieser Zahl und ihres Nachfolgers. Subtrahiere vom Quadrat des Nacholgers das Quadrat der Zahl

1) **Führe die Anweisung mit verschiedenen selbst gewählten Zahlen durch. Was fällt dir auf?**
2) **Beweise die Vermutung aus 1) allgemein.**

Lösung:

$n + (n + 1) = 2n + 1$

$\Rightarrow (n + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$

Beispiel von CCNY-Studierenden:

Calendar Problem

This lesson is prepared for students in middle school 6th grade. By using this enrichment lesson I will compound some topics in just one problem. By doing this I will challenge my students, and enrich my lesson by acceleration, expansion and digression.

Standards

6.A.2 Use substitution to evaluate algebraic expressions.

6.N.4 Identity property of multiplication and addition.

5.A.4 Solve and explain equations involving whole numbers using inverse operations.

7.A.2. Add and subtract monomials with exponents of one.

7.A.8 Create algebraic patterns using graphs, equations and expressions.

7.A.1 Writing algebraic expressions.

Take any calendar

November 09

S	M	T	W	TH	F	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

Tell your friend to choose 4 days that form a square like the example below. Your friend should tell you only the sum of the four days, and you can tell her what the four days are.

18	19
25	26

Now think: How can you figure out the four numbers? Find a rule.

Die erste Zahl wird mit n belegt.

$\Rightarrow$ **n + n + 1 + n + 7 + n + 8**

$\Rightarrow$ **4n + 16 = 88**

$\Rightarrow$ **n = 18**

$\Rightarrow$ **d.h. die 4 Zahlen lauten: 18, 19, 25, 26**

Students will use their knowledge of algebra and averages to solve and explain a mathematical puzzle using calendars.

PREASSESSMENT

Students will need to be able to simplify an expression with one variable, in addition to adding/subtracting whole numbers.

Students will also need to be able to find the average (arithmetic mean) of a set of numbers.

Beispiel einer CCNY-Studierenden - 2

"Do Now":

$x + 2x – 3 + x – 1 + 2x – 2$

$-2s + 4 – s + 7 +3s + 1$

Find the average (arithmetic mean) of the following numbers:

a. 34, 12, 20, 28, 31, 40, 25, 38, 45

b. –11, -4, -22, -1, -15, -8, -10, -21, -30

Übung 1

"Choose a number between 1-25

Double it

Add 10

Divide by 2

Subtract the original number."

Ask 3 students what the final number was (5). Ask the remaining students to raise their hands if they also got 5. All hands should be raised.

Übung 2

Explain the puzzle that the students are attempting to solve:

Using the calendars and a 3x3 box of dates, they are to use the dates (numbers only) to try to solve/explain why you will always end up with the number 9, when you add up all of the dates, and divide by the number in the middle.

Übung 2 – Vorgehensweise

- **Brainstorm ideas**
- **Attempt to prove the puzzle**
- **Clues**
- **Write in notebooks**
- **Solution**

n-8	n-7	n-6
n-1	n	n+1
n+6	n+7	n+8

- **Homework**

Die wichtigen Punkte

Charakteristische Tätigkeiten

Techniken des Argumentierens/Begründens/Beweisens erlernen

Wahl der Argumentationsbasis (Antwortformate)

Schriftliche und mündliche Bearbeitung

Verändern von „herkömmlichen“ Aufgaben

Anwendung in variablen Situationen

Vokabellernen

Lernzieldefinitionen

Spiraling